



Arreglos de Fuentes Puntuales

Capítulo 5

UNI – FIEE
Lima – PERÚ

Ing. Marcial López Tafur
mlopez@uni.edu.pe

Introducción

- En este capítulo continuamos con el concepto de fuente puntual, pero lo extendemos a un sistema de fuentes puntuales.
- Esta metodología es de gran valor debido a que el patrón de cualquier antena puede ser visto como el producto del sistema de fuentes puntuales.
- Gran parte de esta discusión se enfocará sistemas de fuentes puntuales isotrópicas con las cuales pueden representarse diferentes tipos de antenas.

2

Dos Fuentes Isotrópicas Puntuales

Casos:

- Con la misma amplitud y fase
- De igual magnitud pero fase opuesta
- De la misma amplitud y en fase cuadratura
- De igual magnitud y cualquier desfase
- De diferente amplitud y cualquier diferencia de fase

3

Caso 1: Dos fuentes puntuales isotrópicas de la misma amplitud y fase

- Las dos fuentes puntuales, 1 y 2, estar separadas por una distancia "d" y localizados simétricamente con respecto al origen de las coordenadas.
- El ángulo "φ" es medido en sentido anti-horario desde el eje "x" positivo.
- El origen de coordenadas es tomado como referencia para la fase

4

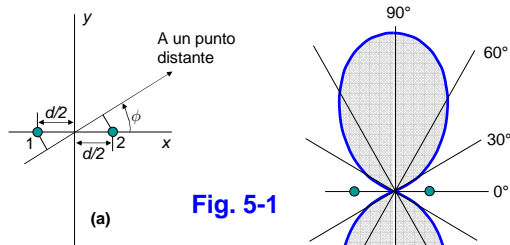
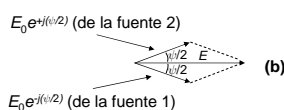


Fig. 5-1



5

- Entonces a una distancia del punto en la dirección "φ" el campo de la fuente 1 es retardado por $(1/2)d_r \cos(\varphi)$, mientras el campo de la fuente 2 esta adelantado por $(1/2)d_r \cos(\varphi)$, donde "d", es la distancia entre las fuentes expresadas en radianes

$$d_r = \frac{2\pi d}{\lambda} = \beta d$$

El campo total a una distancia r en la dirección "φ" es entonces:

$$E = E_0 e^{-j\psi/2} + E_0 e^{+j\psi/2} \dots(1)$$

6

- Donde $\psi = d_r \cos \phi$ y la amplitud de las componentes del campo a la distancia r están dadas por E_0 .
- El primer término en (1) es la componente del campo debido a la fuente 1 y el segundo término es la componente debido a la fuente 2. Ecuación (1) también puede ser escrita de la siguiente manera

$$E = 2E_0 \frac{e^{+j\psi/2} + e^{-j\psi/2}}{2} \dots(2)$$

$$E = 2E_0 \cos \frac{\psi}{2} = 2E_0 \cos \left(\frac{d_r}{2} \cos \phi \right) \dots(3)$$

- notamos que la fase del campo total E no cambia como una función de " ψ ". Para normalizar (3), y poner $2E_0=1$. Asumir además que d es $\lambda/2$. Entonces $d_r = \pi$. Incluyendo estas condiciones en (3) nos resulta

$$E = \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \phi \right) \dots(4)$$

- El patrón de campo de E versus " ϕ " como esta expresado en (4) es presentado en Fig. c. El patrón es una figura bidireccional en forma de ocho con longitud máxima sobre el eje Y. El patrón de espacio tiene forma de roquilla, resultando de la revolución de la figura de este patrón alrededor de la abscisa X. El mismo patrón puede ser obtenido a través de la localización de la fuente 1 en el origen de coordenadas y la fuente 2 a una distancia " d " a lo largo de la abscisa X como esta indicado en la Figura.

- Se obtiene el mismo patrón, tomando ahora el campo de la fuente 1 como referencia, el campo de la fuente 2 en la dirección " ϕ " esta adelantado por $d_r \cos(\phi)$.

$$E = E_0 + E_0 e^{+j\psi} \dots(5)$$

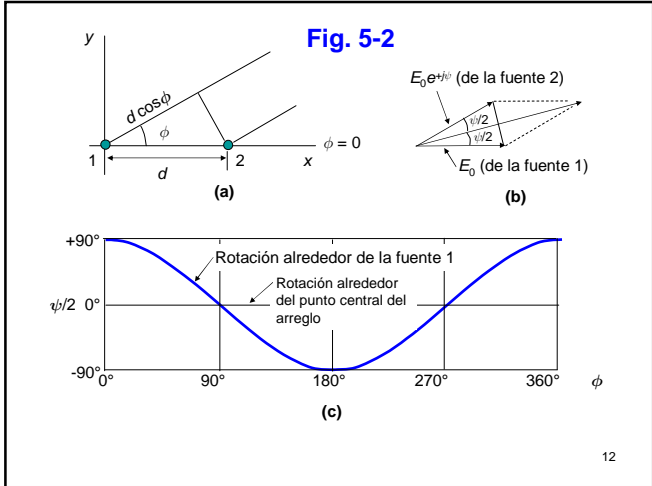
donde $\psi = d_r \cos(\phi)$

$$E = 2E_0 \cos \frac{\psi}{2} = 2E_0 \cos \frac{d_r \cos \phi}{2} \dots(6)$$

- como se obtuvo en el resultado anterior (3). La fase del campo total, sin embargo, no es constante en este caso pero es $\psi/2$, como también es mostrado al rescribir la ec. (5)

$$E = E_0(1 + e^{j\psi}) =$$

$$= 2E_0 e^{j\psi/2} \left(\frac{e^{j\psi/2} + e^{-j\psi/2}}{2} \right) = 2E_0 e^{j\psi/2} \cos \frac{\psi}{2} \dots(7)$$

$$E = e^{j\psi/2} \cos \frac{\psi}{2} = \cos \frac{\psi}{2} \angle \psi/2 \dots(8)$$


- En (8) el factor coseno nos da la variación de amplitud de E , y la exponencial o factor de ángulo, nos da la variación de fase con respecto a la fuente 1 como la referencia.
- **Conclusión:** Un observador a una distancia fija no observa ningún cambio en la fase cuando un sistema es rotado (con respecto a φ) alrededor de su punto medio; pero observa un cambio sí el sistema es rotado con la fuente 1 como centro de rotación.

13

Caso 2: Dos fuentes puntuales isotrópicas de igual magnitud pero fase opuesta

- Este caso es idéntico con el primero que hemos considerado excepto que las dos fuentes están en fase opuesta en lugar de la misma fase. Como al dejar las fuentes como en la Fig. 5-1a. Entonces el campo total en la dirección " φ " a una distancia r grande esta dado por

$$E = E_0 e^{+j\psi/2} - E_0 e^{-j\psi/2} \dots(9)$$

14

$$E = 2jE_0 \text{sen} \frac{\psi}{2} = 2jE_0 \text{sen} \left(\frac{d_r}{2} \cos \varphi \right) \dots(10)$$

- Mientras que el Caso 1 (ecuación 3) involucra el coseno de $\psi/2$, la ecuación (10) para el Caso 2 involucra el seno. La ecuación (10) también incluye un operador "j", indicando que la fase inversa de una de las fuentes, en el Caso 2 resulta en un desfase de 90° del campo total cuando es comparado con el campo total para el Caso 1. Esto no es muy importante aquí.

15

$$E = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi \right) \dots(11)$$

- poniendo $2jE_0=1$ y considerando el caso especial de $d=\lambda/2$. Las direcciones máximas de campo φ_m son obtenidas al poner el argumento de la ecuación (11) igual a $\pm(2k+1)\pi/2$.

$$\frac{\pi}{2} \cos \varphi_m = \pm(2k+1) \frac{\pi}{2} \dots(11a)$$

donde $k=0, 1, 2, 3...$ Para $k=0$, $\cos \varphi_m = \pm 1$ y $\varphi_m = 0^\circ$ y 180° .

16

- Las direcciones de nulos φ_0 son dadas por:

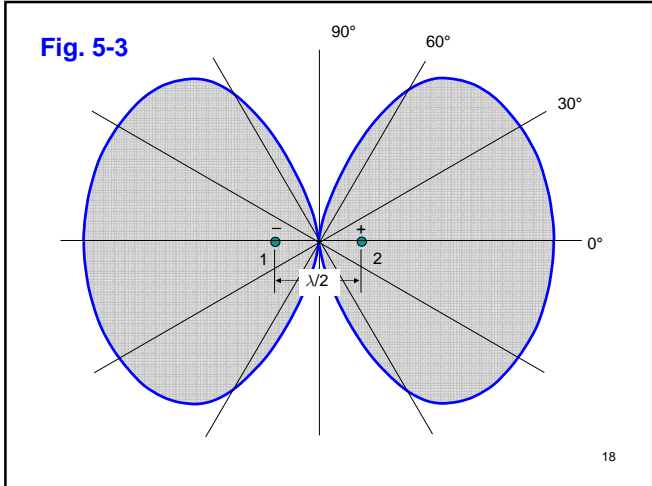
$$\frac{\pi}{2} \cos \varphi_0 = \pm k\pi \dots(11b)$$

Para $k=0$, $\varphi_0 = \pm 90^\circ$. Las direcciones de media potencia están dadas por:

$$\frac{\pi}{2} \cos \varphi = \pm(2k+1) \frac{\pi}{4} \dots(11c)$$

Para $k=0$, $(\varphi) = \pm 60^\circ, \pm 120^\circ$. El patrón de campo se muestra en la fig. 5-3

17



- El patrón es una figura relativamente ancha en forma de 8 con el máximo en la dirección de la línea que une las fuentes (eje X). El patrón de espacio es una figura de revolución de su patrón alrededor del eje X. Las dos fuentes, en este caso pueden ser descritas como un tipo simple de sistema longitudinal de radiación. En contraste a este patrón, las fuentes puntuales "en fase" producen un patrón con el campo máximo normal a la línea que une las fuentes (Fig. 5-1c). Las dos fuentes para este caso pueden ser descritas como un sistema simple de radiación transversal.

19

Caso 3: Dos fuentes isotrópicas puntuales de la misma amplitud y en fase cuadratura

- Tomando el origen de coordenadas como la referencia para la fase, la fuente 1 es retardada por 45° y la fuente 2 es adelantada 45°. Entonces el campo total en la dirección φ a una distancia grande resta dada por:

$$E = E_0 \exp \left[+ j \left(\frac{d_r \cos \varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] + E_0 \exp \left[- j \left(\frac{d_r \cos \varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \dots(12)$$

20

$$E = 2E_0 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{d_r \cos \varphi}{2} \right) \dots(13)$$

- Haciendo $2E_0=1$ y $d=\lambda/2$ se llega a tener:

$$E = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cos \varphi \right) \dots(14)$$

El patrón de campo de (14) es presentado en Fig. 5-4. El patrón de espacio es una figura de revolución de su patrón alrededor del eje X. La mayor parte de la radiación está en el segundo y tercer cuadrantes. Es interesante notar que el campo en la dirección φ = 0° es el mismo que el de la dirección φ = 180°.

21

- Las máximas direcciones de campo φ_m son obtenidas al poner el argumento de (14) igual a kπ, donde kπ = 0, 1, 2, 3,

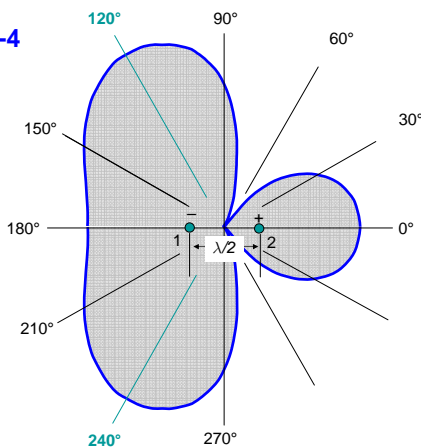
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cos \varphi_m = k \pi \dots(15)$$

$$\text{Para } k=0 \quad \frac{\pi}{2} \cos \varphi_m = -\frac{\pi}{4} \dots(16)$$

$$\varphi_m = 120^\circ \quad \text{y} \quad 240^\circ \dots(17)$$

22

Fig. 5-4



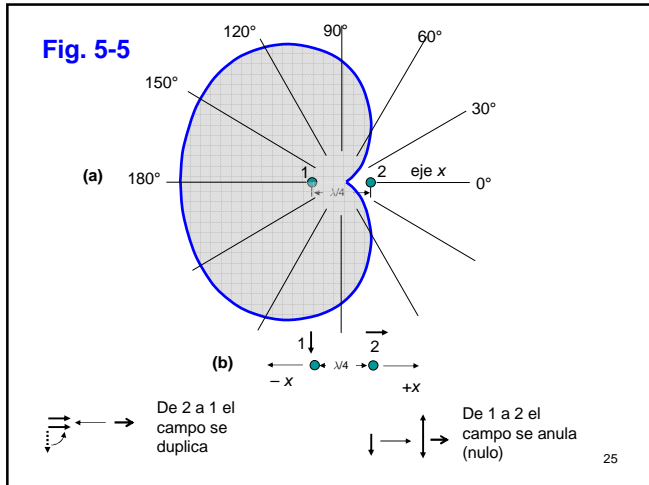
23

- Si el espaciamiento entre las fuentes es reducido a λ/4, (13) se convierte en

$$E = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cos \varphi \right) \dots(18)$$

El patrón de campo para este caso es ilustrado por Fig. 5-5a. Este tiene la forma de una cardioide, de patrón unidireccional con máximo campo en la dirección negativa del eje X. El patrón de espacio es una figura de revolución de su patrón alrededor del eje X.

24



- Un método simple para determinar la dirección máxima del campo es ilustrado en la Fig. 5-5b. Como se puede apreciar (indicada por vectores), la fase de la fuente 2 es 0° (vector a la derecha) y la fase de la fuente 1 es 270° (vector hacia abajo). De esta manera, la fuente 2 adelanta a la fuente 1 en un desfase de 90°. Para encontrar el campo radiado a la izquierda, imagine que partimos de la fuente 2 (fase 0°) y nos dirigimos a la izquierda, viajando con la onda (fase 0°)

26

- La fase de la onda con la que estamos viajando es 0° y no cambia pero para el momento en que hemos viajado $\lambda/4$ y arribado a la fuente 1, un 1/4 de periodo habrá transcurrido, por eso la corriente en la fuente 1 habrá avanzado 90° (vector rotado CCW) de 270° a 0°, poniéndose en la misma fase que la onda con la que estamos viajando. Como al centro del diagrama en la Fig. 5-2b. De esta manera, el campo de la onda de la fuente 2 refuerza al de la fuente 1,

27

- y los dos campos viajan a la izquierda juntos en fase produciendo un campo máximo a la izquierda el cual es dos veces el campo de cualquiera de las fuentes sola.
- Ahora partimos de la fuente 1 con fase 270° y viajamos a la derecha. Para el momento en que arribemos a la fuente 2 su campo habrá avanzado de 0° a 90°, se encuentra en fase opuesta y cancela el campo de la onda con la que estamos viajando, (diagrama de la Fig. 5-5b), resultando en radiación cero a la derecha

28

Caso 4: Caso general de dos fuentes isotrópicas puntuales de igual magnitud y cualquier desfase

- Dos fuentes isotrópicas puntuales de igual amplitud pero de diferente fase ϕ . La diferencia total en fase " ψ " entre los campos de las fuentes 1 y 2 en un punto de distancia en la dirección " ϕ " (ver Fig. 5-2a) es entonces

$$\psi = d_r \cos \phi + \delta \quad \dots(19)$$

29

- Tomando la fuente 1 como referencia para la fase, el signo positivo en (9), indica que la fuente 2 esta adelantada en fase por un ángulo ϕ . Un signo - sería usado para indicar un retardo de fase. Sí es que, se refiere al punto central del sistema, la fase del campo de la fuente 1 a un punto de distancia, esta dado por $-\psi/2$ y el de la fuente 2 por $+\psi/2$. El campo total es:

$$E = E_0(e^{+j\psi/2} + e^{-j\psi/2}) = 2E_0 \cos \frac{\psi}{2} \quad \dots(20)$$

30

- normalizando la ec. (20) tenemos la expresión general para el patrón de campo de dos fuentes isotrópicas de igual amplitud y fase arbitraria,

$$E = \cos \frac{\psi}{2} \quad \dots(21)$$

donde ψ esta dado por (19). Los tres casos que hemos discutido son evidentemente casos especiales de (21). De esta manera, los casos 1,2 y 3 son obtenidos de (21) cuando " δ " es 0° , 180° y 90° respectivamente

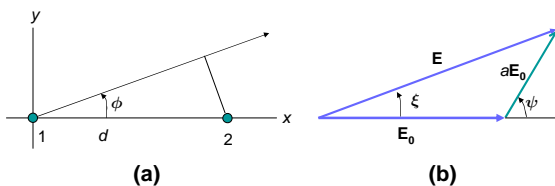
31

Caso 5: Caso más general de dos fuentes puntuales isotrópicas de diferente amplitud y cualquier diferencia de fase

- Amplitudes son diferentes y la diferencia de fase arbitraria. Con la fuente 1 en el origen (figura 5-6a). Se asume que la fuente 1 tiene amplitud mayor respecto a la fuente 2 y que su campo a una gran distancia r tiene una amplitud de E_0 . Dejando el campo de la fuente 2 a un valor de amplitud " aE_0 " ($0 \leq a \leq 1$) a la distancia r .

32

Fig. 5-6



(a) Dos fuentes puntuales isotrópicas de diferente amplitud y fase arbitraria con respecto del sistema de coordenadas.
 (b) Vector suma de los campos dispuestos como en (a). La amplitud de la fuente 2 se asume que es más pequeña que la de la fuente 1 por un factor " a ".

33

- Entonces (fig. 5-6b), la magnitud y ángulo de fase del campo total E esta dado por:

$$E = E_0 \sqrt{(1 + a \cos \psi)^2 + a^2 \sin^2 \psi} \angle \arctan [a \sin \psi / (1 + a \cos \psi)] \quad \dots(22)$$

donde $\psi = d_r \cos \phi + \delta$ y el ángulo de fase (\angle) es referido a la fuente 1. Este es el ángulo de fase " ξ " mostrado en la Fig. 5-6b.

34

Fuentes puntuales no isotrópicas y el principio de multiplicación de patrones

- Todos los casos considerados en la sección precedente involucran fuentes puntuales isotrópicas. Estos pueden ser fácilmente extendidos a una situación más general en la cual las fuentes son no isotrópicas pero similares. La palabra similar es aquí usada para indicar que la variación con el ángulo absoluto " ϕ " de ambos, amplitud y fase, del campo es la misma.

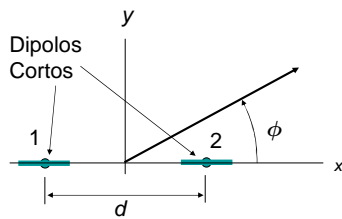
35

- Las amplitudes máximas de las fuentes individuales pueden ser diferentes. Si, sin embargo, son también iguales, las fuentes no son solamente similares sino que son idénticas. Como un ejemplo, reconsideremos el Caso 4 de la sección 5-2 en la cual las fuentes son idénticas, con la modificación que ambas fuentes 1 y 2 tienen patrones de campo dados por

$$E = E'_0 \sin \phi \quad \dots(1)$$

36

Fig. 5-7



Dos fuentes no isotrópicas con respecto al sistema de coordenadas.

37

- Patrones de este tipo deben ser producidos por dipolos cortos orientados de manera paralela respecto a eje X como se sugirió en la Fig. 5-7. Sustituyendo (1) en (5-2-20) y normalizando al poner $2E_0=1$, nos resulta el campo patrón del sistema como:

$$E = \text{sen}\phi \cos \frac{\psi}{2} \dots\dots(2)$$

Donde $\psi = d \cos\phi + \delta$

38

- Esto resultado es el mismo como el obtenido al multiplicar el patrón de la fuente individual ($\text{sen}\phi$) por el patrón de dos fuentes isotrópicas puntuales ($\cos\psi/2$). Si las fuentes puntuales similares pero diferentes del Caso 5 tienen patrones como los dados por (1), el patrón total normalizado es:

$$E = \text{sen}\phi \sqrt{(1 + a \cos\psi)^2 + a^2 \text{sen}^2\psi} \dots\dots(3)$$

39

- **“El patrón de campo de un sistema de fuentes puntuales no isotrópicas pero similares es el producto del patrón de la fuente individual de un sistema de fuentes puntuales isotrópicas tomando las mismas posiciones, amplitudes relativas, y fase como fuentes puntuales no isotrópicas”.**

40

- **“El patrón de campo total de un arreglo de fuentes no isotrópicas pero similares es el producto del patrón de fuente individual y un sistema de fuentes puntuales isotrópicas cada una localizada al centro de la fase de la fuente individual y teniendo la misma amplitud relativa y fase, mientras el patrón de fase total es la suma de los patrones de fase de la fuente individual y el sistema de fuentes puntuales isotrópicas”.**

41

$$E = \underset{\text{patrón de campo}}{f(\theta, \phi)} F(\theta, \phi) \angle \underset{\text{patrón de fase}}{f_p(\theta, \phi) + F_p(\theta, \phi)} \dots\dots(4)$$

$f(\theta, \phi)$ = Patrón de campo fuente individual

$f_p(\theta, \phi)$ = Patrón de fase fuente individual

$F(\theta, \phi)$ = Patrón de campo de arreglo fuentes isotrópicas

$F_p(\theta, \phi)$ = Patrón de fase de arreglo fuentes isotrópicas

Los patrones son expresados en (4) como una función de ambos ángulos polares para indicar que el principio de la multiplicación de patrón se aplica a patrones de espacio como también a los casos bidimensionales que hemos estado considerando.

42

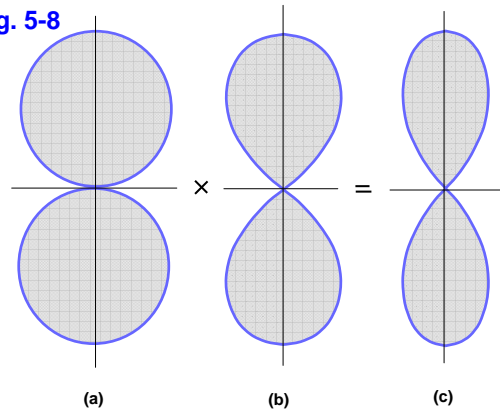
Ejemplo 5.3.1

- Asumir dos fuentes puntuales idénticas separadas por una distancia "d", cada fuente tiene el patrón de campo dado por (1) como puede ser obtenido por dos dipolos cortos puestos como en la Fig. 5-7. Dejando a $d = \lambda/2$ y el ángulo de fase $\delta = 0^\circ$.

$$E = \text{sen}\varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\varphi\right) \dots\dots(5)$$

43

Fig. 5-8



44

- Este patrón es ilustrado en la Fig. 5-8c como el producto del patrón de la fuente individual ($\text{sen}\varphi$) mostrado en (a) y el patrón del sistema $\cos[(\pi/2)\cos\varphi]$ mostrado en (b).
- El patrón es más agudo que el del Caso 1 (sección 5-2) para las fuentes isotrópicas.
- A esta distancia, el campo máximo de la fuente individual esta en la dirección $\varphi = 90^\circ$, el cual coincide con la dirección del campo máximo para el sistema de dos fuentes isotrópicas.

45

Ejemplo 5.3.2

- Consideremos la siguiente situación en la cual $d = \lambda/2$ y $\delta = 0$, como en el Ej. 5-3.1 pero con patrones de fuente individual dados por:

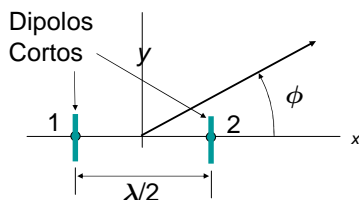
$$E = E_0' \cos\varphi \dots\dots(6)$$

Por el principio de multiplicación de patrón el campo normalizado total es:

$$E = \cos\varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\varphi\right) \dots\dots(7)$$

46

Fig. 5-9



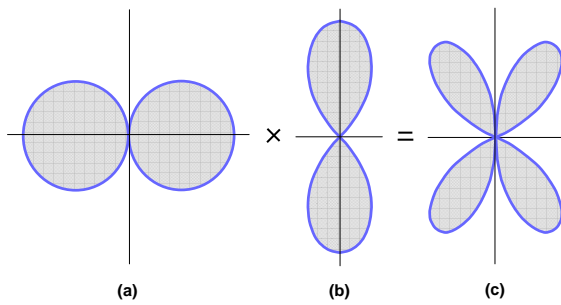
Sistema de dos fuentes no isotrópicas con respecto al sistema de coordenadas.

47

- El patrón total del sistema en el plano XY viene dado por (7) y esta ilustrado en Fig. 5-10c como el producto del patrón de fuente individual ($\cos\varphi$) mostrado en (a) y el patrón del sistema $\cos(\pi/2\cos\varphi)$ mostrado en (b).
- El patrón total del sistema en el plano XY tiene cuatro lóbulos con nulos en los ejes X e Y.

48

Fig. 5-10



49

- Si los sistemas en los ejemplos anteriores son parte de sistemas más grande, los sistemas más pequeños pueden ser estimados como fuentes puntuales no isotrópicas en el sistema más grande – *otra aplicación del principio de multiplicación de patrones*.
- De esta manera el principio de patrón de multiplicación puede ser aplicado "n" veces para encontrar los patrones de arreglos de sistemas.

50

Ejemplo de síntesis de patrón por multiplicación de patrones

- Teóricamente un arreglo de fuentes isotrópicas puntuales podría producir cualquier patrón arbitrario. Proceso que no siempre simple y en algunos casos difícil o imposible de construir. Una metodología para el problema de síntesis de antenas es la aplicación de multiplicación de patrones a combinaciones de arreglos prácticos,

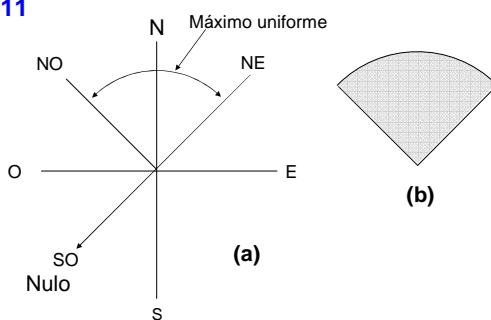
51

la combinación que mejor se aproxima al patrón deseado es el resultado de un proceso de "prueba y error".

- Consideremos el siguiente problema hipotético: Una estación emisora (en la banda de frecuencia de 500 a 1500 KHz.) requiere un patrón en el plano horizontal cumpliendo con las condiciones indicadas en la Fig. 5-11a. La intensidad máxima de campo, con una pequeña variación como sea posible, esta para ser radiada a 90° en el sector comprendido entre el NE y NO.

52

Fig. 5-11



- (a) Requerimientos para el patrón de una estación emisora.
(b) Patrón idealizado cumpliendo con los requerimientos

53

- Ningún nulo e el patrón puede ocurrir en este sector. Sin embargo, los nulos pueden ocurrir en cualquier dirección en el sector complementario de 270°, pero, como un requerimiento adicional, los nulos deben estar presentes en la dirección este y la dirección suroeste para prevenir interferencias con otras estaciones en esas direcciones.
- Un patrón idealizado en el sector formado cumpliendo con aquellos requerimientos es ilustrado in la Fig. 5-11b.

54

- La antena para este patrón consiste de un arreglo de cuatro torres verticales. Las corrientes en todas las torres serán iguales en magnitud, pero la fase puede ser ajustada para cualquier tipo de relación. No hay ninguna restricción en el espaciamiento o distribución de las torres.
- Como estamos interesados solamente en el patrón horizontal plano, cada torre puede ser considerada como una fuente puntual isotrópica. El problema entonces llega a ser el de encontrar una relación de espacio y fase de cuatro fuentes puntuales isotrópicas localizadas en el plano horizontal el cual cumpla con los requerimientos antes mencionados.

55

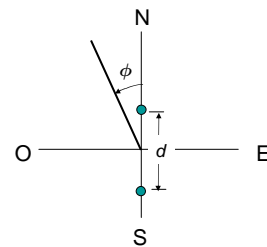
- El principio de multiplicación de patrón será aplicado a la solución de este problema a través de la búsqueda de patrones de dos pares de fuentes isotrópicas las cuales producen el patrón deseado al ser multiplicadas juntas.
- Primero encontremos un par de fuentes cuyos patrones cumplan los requerimientos de un amplio lóbulo de radiación con el máximo hacia el norte y un nulo al suroeste.
- Este será llamado el patrón primario.

56

- Dos fuentes isotrópicas puestas en fase de un sistema longitudinal puede producir un patrón con un lóbulo principal mas amplio que cuando este puesto en fase como un sistema transversal (por ejemplo, compare la Fig. 5-1c y 5-5).
- Dado que se desea un amplio lóbulo hacia el norte, un arreglo longitudinal de dos fuentes isotrópicas como en la Fig. 5-12 será tratado.
- A partir de una consideración de formas de patrón como una función de separación y fase, un espaciamiento entre $\lambda/4$ y $3\lambda/8$ será adecuada (ver Fig. 16-11). Como consecuencia, dejemos $d = 0.3\lambda$. Entonces el patrón de campo para el sistema es:

57

Fig. 5-12



Distribución de dos fuentes puntuales isotrópicas para ambos sistemas primario y secundario.

58

$$E = \cos \frac{\psi}{2} \quad \dots(1)$$

$$\psi = 0.6 \cos \phi + \delta \quad \dots(2)$$

Para que halla un nulo en el patrón de (1) a $\phi = 135^\circ$, es necesario que

$$\psi = (2k + 1)\pi \quad \dots(3)$$

Donde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

De la ecuación (2) y (3) entonces tenemos

$$-0.6\pi \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta = (2k + 1)\pi \quad \dots(4)$$

$$\delta = (2k + 1)\pi + 0.425\pi \quad \dots(5)$$

59

- Para $k = 0$, $\delta = -104^\circ$. El patrón para este caso ($d = 0,3\lambda$ y $\delta = -104^\circ$) es ilustrado por Fig. 5-13a.
- Luego busquemos un sistema de dos fuentes isotrópicas puntuales que producirán un patrón de radiación que cumpla los requerimientos de un nulo a $\phi = 270^\circ$ y que también tenga un lóbulo amplio hacia el norte.
- Este será llamado como "Patrón Secundario". Este patrón multiplicado por el patrón del sistema primario entonces producirá el patrón total del sistema.

60

- Si las fuentes isotrópicas secundarias son ordenadas como en la Fig. 5-12 y tienen una diferencia de fase de 180° , entonces habrá un nulo a $\phi = 270^\circ$. Damos el espaciamiento $d = 0,6\lambda$. Entonces el patrón secundario esta dado por (1) donde

$$\psi = 1.2\pi \cos \phi + \pi \dots(6)$$

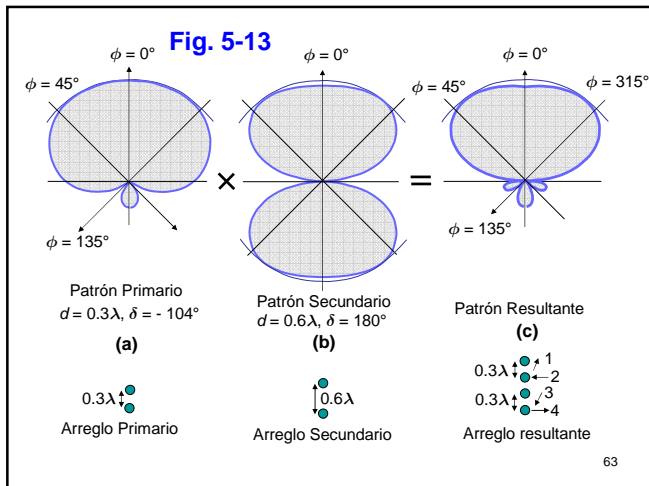
El patrón es ilustrado por la Fig. 5-13b. Por el principio de multiplicación de patrón, el patrón total del sistema es el producto de este patrón y el patrón del sistema primario, o

61

$$E = \cos(54 \cos \phi - 52^\circ) \cos(108^\circ \cos \phi + 90^\circ) \dots(7)$$

- Este patrón, el cual es ilustrado por la Fig. 5-13c, satisface los requerimientos del patrón.
- El sistema completo es obtenido por reemplazo de cada una de las fuentes isotrópicas del patrón secundario por el sistema de dos fuentes que producen el patrón primario.
- El punto medio de cada sistema primario es su centro de fase por eso este punto es localizado en la localización de una fuente secundaria.

62



63

- La antena completa es un sistema lineal de cuatro fuentes puntuales isotrópicas (parte mas baja de la Fig. 5-13), donde ahora cada fuente representa una única torre vertical. todas las torres poseen la misma corriente.
- La corriente de la torre 2 adelanta a la de la torre 1 y la de la torre 4 adelanta a la de la torre 3 por 104° , mientras la corriente en las torres 1 y 3, y 2 y 4, están en oposición de fase.
- La fase relativa de la corriente es ilustrada por los vectores en la parte mas baja de la Fig. 5-13c.

64

- La solución obtenida es solo una de un infinito número de posibles soluciones involucrando cuatro torres.
- Esto es, sin embargo, una solución práctica y satisfactoria al problema.
- La variación de fase " ξ " en torno de los sistemas primario, secundario y total se muestra en la Fig. 5-14a, b, y c con el centro de fase al punto central de cada sistema y también a la fuente ubicada al extremo sur.
- El ordenamiento de los sistemas con los centros de fase es ilustrado en la Fig.5-14d para ambos casos.

65

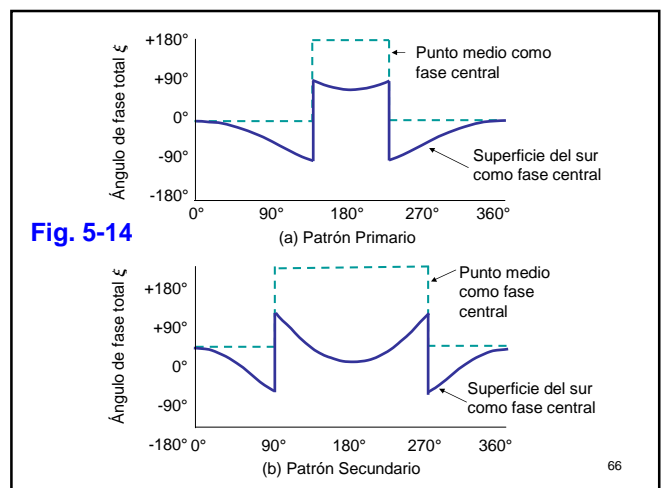
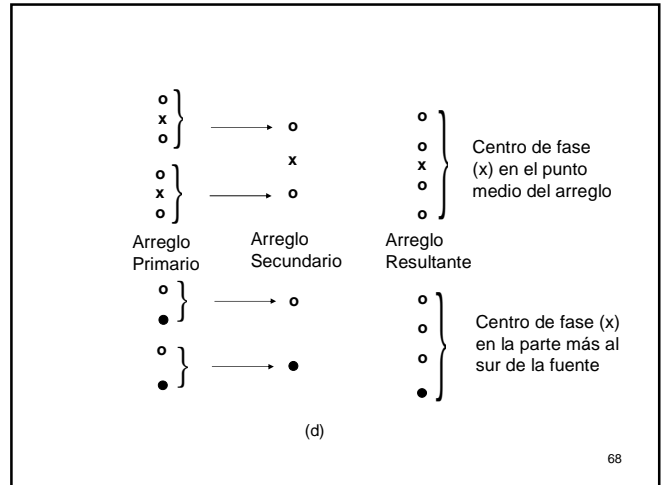
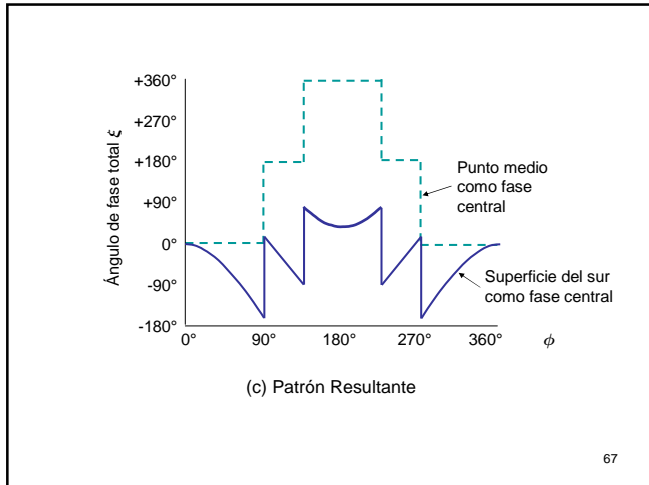


Fig. 5-14

66



Fuentes puntuales diferentes y no isotrópicas

- No se aplica principio de multiplicación y los campos de las fuentes deben ser añadidos a cada ángulo "φ" por el cual el campo total es calculado.
- De esta manera, para dos fuentes no similares 1 y 2 situadas en el eje X con la fuente uno en el origen y las fuente separadas por una distancia "d" (de igual geometría como la Fig. 5-6) el campo total en general se expresa de la siguiente manera:

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \sqrt{[f(\varphi) + aF(\varphi)\cos\psi]^2 + [aF(\varphi)\sin\psi]^2} \angle f(\varphi) + \arctan[aF(\varphi)\sin\psi / (f(\varphi) + aF(\varphi)\cos\psi)] \dots(1)$$

- donde el campo total de la fuente 1 es

$$E_1 = E_0 f(\varphi) \angle f_p(\varphi) \dots(2)$$

y de la fuente 2:

$$E_2 = aE_0 F(\varphi) \angle F_p(\varphi) + d_r \cos\varphi + \delta \dots(3)$$

- $E_0 =$ constante
- $a =$ proporción de la máxima amplitud de la fuente 2 a la fuente 1 ($0 \leq a \leq 1$)
- $\psi = d_r \cos\varphi + \delta = f_p(\varphi) + F_p(\varphi)$, donde
- $\delta =$ fase relativa de la fuente 2 con respecto a la fuente 1
- $f(\varphi) =$ campo patrón relativo de la fuente 1
- $f_p(\varphi) =$ patrón de fase de la fuente 1
- $F(\varphi) =$ patrón de campo relativo de la fuente 2
- $F_p(\varphi) =$ patrón de fase de la fuente 2

- En (1) el ángulo de fase (\angle) es referido a la fase del campo de la fuente 1 en alguna dirección de referencia ($\varphi = \varphi_0$)
- En el caso especial donde los patrones de campo son idénticos pero los patrones de fase no lo son, $a = 1$, y

$$f(\varphi) = F(\varphi) \dots(4)$$

$$E = 2E_0 f(\varphi) \cos \frac{\psi}{2} \angle f_p(\varphi) + \psi / 2 \dots(5)$$

- consideremos un ejemplo en el cual el campo de las fuente 1 y 2 están dados por:

$$E_1 = \cos \varphi \angle 0 \quad \dots(6)$$

$$E_2 = \text{sen} \varphi \angle \psi \quad \dots(7)$$

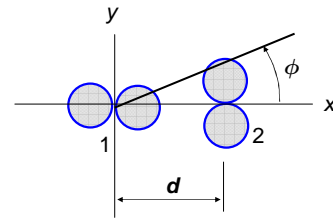
donde $\psi = d_r \cos \varphi + \delta$

La relación de las dos fuentes se muestra en Fig. 5-15. La fuente 1 esta localizada en el origen. El campo total $E = E_1 + E_2$, o

$$E = \cos \varphi + \text{sen} \varphi \angle \psi \quad \dots(8)$$

73

Fig. 5-15



Relación de dos fuentes no isotrópicas no similares para un plano coordenado.

74

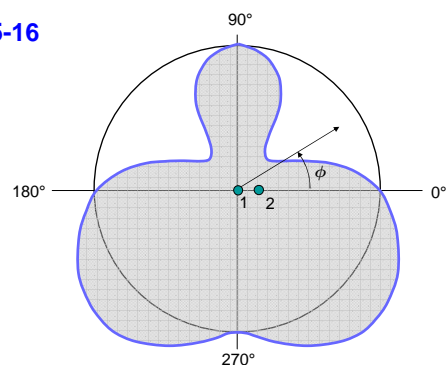
- Consideremos $d = \lambda/4$ y fase en cuadratura de las fuentes ($\delta = \pi/2$). Entonces

$$\psi = \frac{\pi}{2} (\cos \varphi + 1) \quad \dots(9)$$

El cálculo es por adición grafica de vectores. El patrón de campo resultante para el campo total E del arreglo es mostrado en la Fig. 5-16, y el patrón de fase resultante para un ángulo "xi" esta dado en la Fig. 5-17. El ángulo "xi" es el ángulo de fase entre el campo total y el campo de la fuente 1 en la dirección $\varphi = 0$.

75

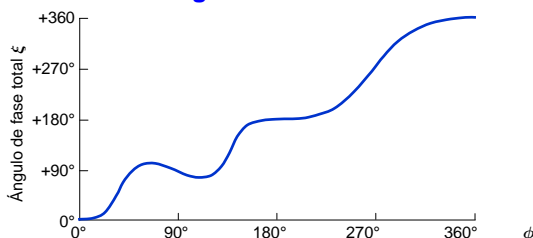
Fig. 5-16



Patrón de campo de un sistema de dos fuentes no isotrópicas no similares de la Fig. 5-15 para $d=\lambda/4$ y $\delta=90^\circ$.

76

Fig. 5-17



Patrón de fase de un sistema que tiene el patrón de campo de la Fig. 5-16. El ángulo de fase "xi" tiene a la fuente 1 como centro de fase.

77

Arreglos lineales de n fuentes puntuales isotrópicas de igual amplitud y espaciamiento

- "n" fuentes puntuales isotrópicas de igual amplitud y espaciamiento ordenados en un sistema lineal:

$$E = 1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \dots + e^{j(n-1)\psi} \quad \dots(1)$$

donde "psi" es la diferencia total de fase de los campos de fuentes adyacentes

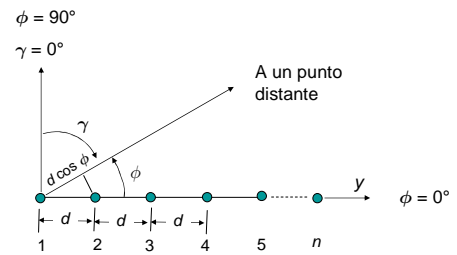
$$\psi = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \varphi + \delta = d_r \cos \varphi + \delta \quad \dots(2)$$

78

- donde " δ " es la diferencia de fase de las fuentes adyacentes, i.e., de la fuente 2 con respecto a 1, 3 con respecto a 2, etc.
- Las amplitudes de los campos de las fuentes son todas iguales y tomadas como unidad. La fuente 1 (Fig. 5-18) es la fase de referencia. De esta manera, a un punto distante en la dirección " φ " el campo de la fuente 2 esta adelantado en fase con respecto a la fuente 1 por " ψ ", el campo de la fuente 3 esta adelantado en fase con respecto a la fuente 1 por 2ψ , etc.

79

Fig. 5-18



Ordenamiento de un sistema lineal de " n " fuentes puntuales isotrópicas.

80

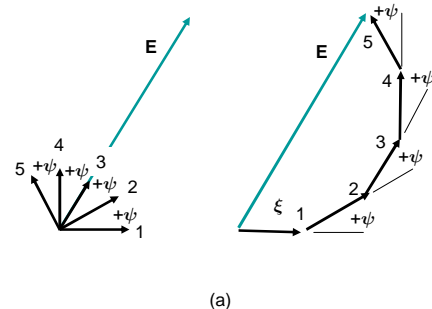
Obteniendo:
$$E = \frac{\text{sen}(n\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)} \dots(8)$$

- En este caso el patrón de fase es una función escalón según lo dado por la muestra de (8). La fase del campo es constante dondequiera E tenga un valor pero cambia de signo cuando E pasa por 0.
- el valor normalizado para el campo total para $E_{\text{max}} = n$ es

$$E = \frac{1 \text{ sen}(n\psi/2)}{n \text{ sen}(\psi/2)} \dots(9)$$

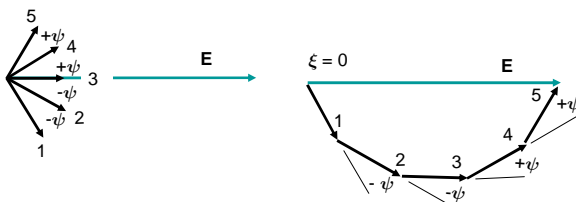
81

Fig. 5-19



(a)

82

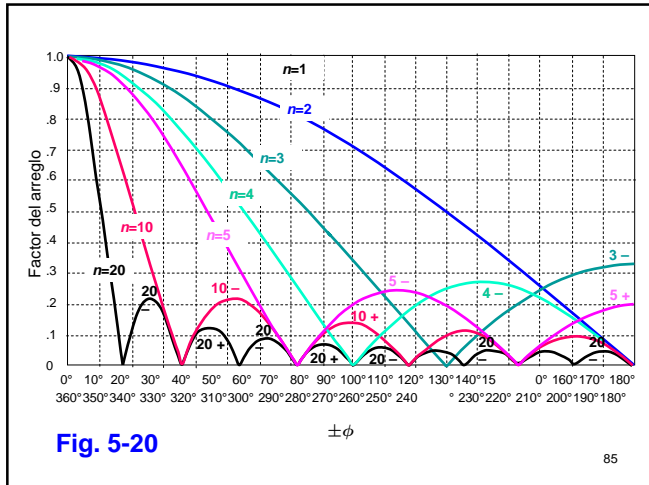


(b)

83

- El campo como muestra la ecuación (9) será referido como el "factor de sistema".
- Los valores del factor del sistema como son obtenidos de la ecuación (9) para varios números de fuentes son presentados en la Fig. 5-20.
- Si es que " ψ " es conocido como una función de " φ ", entonces el patrón de campo puede ser obtenido directamente de la Fig. 5-20.

84



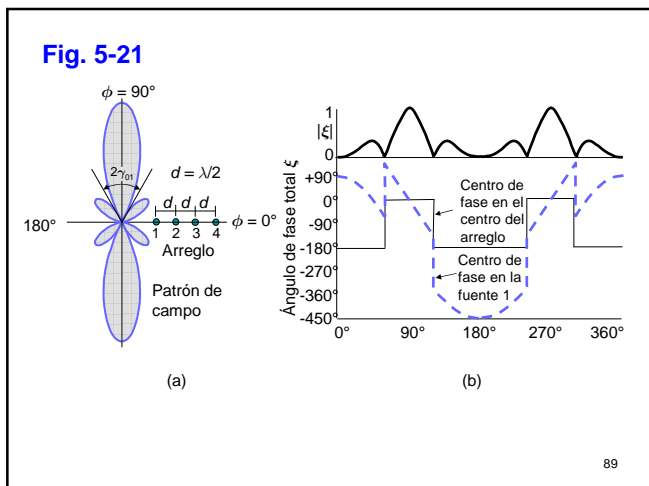
- Podemos concluir de la anterior discusión que el campo del sistema será un máximo en cualquier dirección " ϕ " para $\psi=0$.
- En casos especiales, ψ puede que no sea cero para cualquier valor de " ϕ ", y en este caso el campo es usualmente un máximo al valor mínimo de " ψ ".

Caso 1. Sistemas de radiación transversal (Fuentes en Fase)

- Arreglo lineal de " n " fuentes isotrópicas de la misma amplitud y fase. En consecuencia, $\delta=0$ y $\psi = d_r \cos \phi \dots(10)$

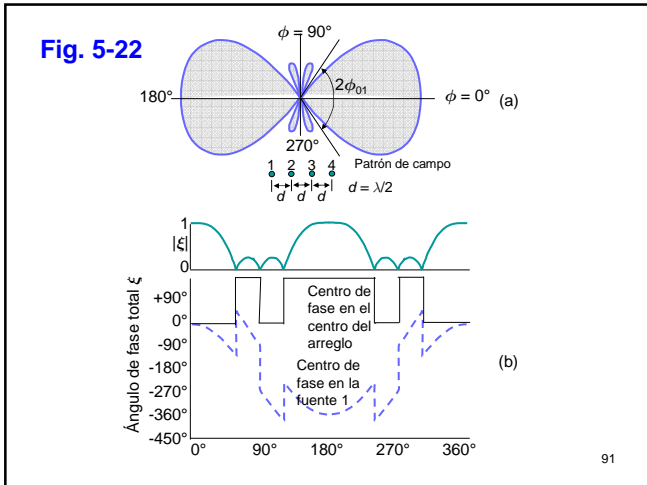
Para hacer $\psi=0$ se requiere que $\phi=(2k+1)(\pi/2)$, donde $k=0,1,2,3,\dots$
 El campo es, por consiguiente, un máximo cuando $\phi = \frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2} \dots(10)a$

- Esto es, el campo máximo esta en la dirección normal al sistema.
- Por lo tanto, esta condición, la cual es caracterizada por fuentes en fase ($\delta=0$), resulta en un tipo de arreglo transversal.
- Ejemplo, el patrón de un sistema transversal de cuatro fuentes puntuales isotrópicas en fase de igual amplitud es mostrada en la Fig. 5-21a.
- El espaciamiento entre fuentes es $\lambda/2$. Los patrones de fase en Fig 5-21b



Caso 2. Sistema ordinario longitudinal (End-Fire)

- Ahora busquemos el ángulo de fase entre fuentes adyacentes para hacer que el campo tenga un máximo en la dirección del arreglo ($\phi = 0$).
- Un arreglo de este tipo puede ser llamado un sistema longitudinal. Para esto sustituimos las condiciones de $\psi = 0$ y $\phi = 0$ en (2), del cual $\delta = -d_r \dots(11)$



Caso 3. Sistema de radiación longitudinal con directividad incrementada

- La situación discutida en el Caso 2, particularmente, para $\delta = -d_r$, produce un campo máximo en la dirección $\phi = 0$ pero no proporciona máxima directividad.
- Se consigue aumentar la directividad incrementando el cambio de fase entre fuentes que

$$\delta = -\left(d_r + \frac{\pi}{n}\right) \dots(12)$$

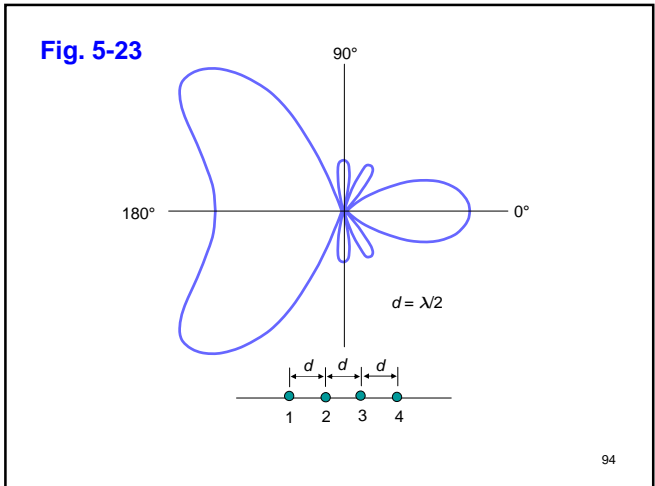
92

- Esta condición será referida como la condición para el "incremento de directividad". De esa manera para la diferencia de fase de los campos a una gran distancia tenemos

$$\psi = d_r (\cos \phi - 1) - \frac{\pi}{n} \dots(13)$$

Con un ejemplo, el patrón de campo de un sistema de radiación longitudinal de cuatro fuentes puntuales isotrópicas para este caso es ilustrado en la Fig. 5-23.

93



- El espaciamiento entre fuentes es $\lambda/2$, y por lo tanto $\delta = -(5\pi/4)$. Por consiguiente, las condiciones son las mismas para como para el arreglo con el patrón de la Fig. 5-22, excepto que la diferencia de fase entre fuentes esta incrementada por $\pi/4$.
- Comparando los patrones de campo de las Figs. 5-22a y 5-23, es aparente que la diferencia de fase adicional produce un lóbulo principal considerablemente agudo en la dirección $\phi = 0$.

95

- Sin embargo, la espalda de los lóbulos en este caso es excesivamente grande debido a que el gran valor de espaciamiento da lugar a una gama demasiado grande en " ψ ".
- Para realizar el incremento ofrecido de directividad por la diferencia adicional de fase se requiere que $|\phi|$ sea restringido en su rango a un valor de π/n para $\phi = 0$ y un valor en la vecindad de π para $\phi = 180^\circ$.
- Esto puede ser realizado si el espacio es reducido.

96

- Por ejemplo, el patrón de campo de un arreglo de 10 fuentes isotrópicas puntuales de igual amplitud y espaciadas $\lambda/4$ es presentado aparte en la Fig. 5-24a para la condición de fase produciendo una directividad incrementada ($\delta = -0.6\pi$).
- En contraste con este patrón, el primero es presentado en la Fig. 5-24b para la antena idéntica con la fase de un arreglo ordinario de radiación longitudinal ($\delta = -0.5\pi$).

97

- El patrón de máximo campo de la Fig. 5-24a ocurre a un ángulo de $\varphi = 0$ y $\psi = -\pi/n$.
- En general, cualquier incremento de directividad de un arreglo longitudinal, con un máximo en $\psi = -\pi/n$, tiene un patrón de campo normalizado dado por:

$$E = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{\text{sen}(n\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)} \dots(14)$$

98

Caso 4. Sistema con máximo campo en una dirección arbitraria.

- Caso de un sistema con patrón de campo que tiene un máximo en alguna dirección arbitraria φ_1 que es diferente de $k\pi/2$ donde $k = 0, 1, 2, \text{ o } 3$. Entonces (2) se convierte en

$$0 = d_r \cos \varphi_1 + \delta \dots(15)$$

Al especificar el espaciamiento d_r , la diferencia de fase requerida es entonces determinada por (15). Inversamente, al cambiar " δ " la dirección de haz φ_1 puede ser desplazada.

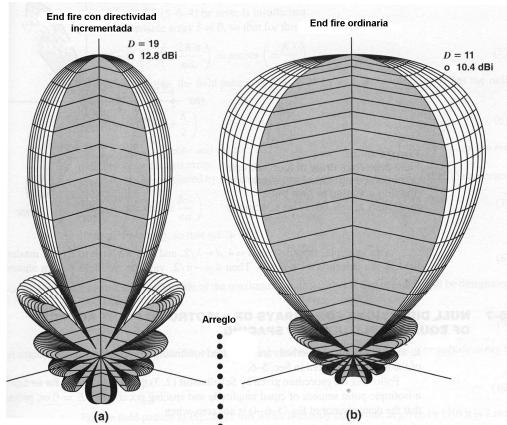
99

Tabla 5-1 Comparación de sistemas longitudinales

	Sistema ordinario longitudinal	Sistema longitudinal con directividad incrementada
Ancho de haz entre puntos de media potencia	69°	38°
Ancho de haz entre los primeros nulos	106°	74°
Directividad	11	19

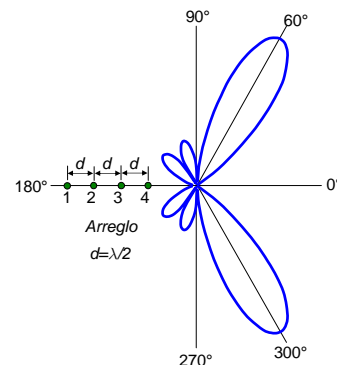
100

Fig. 5-24 Desplazamiento de fase 180°(0.6 π) versus 90°(0.5 π)



101

Fig. 5-25



Patrón de campo de un sistema de cuatro fuentes puntuales de igual amplitud con desfase adaptado para proporcionar el máximo en $\varphi=60^\circ$. El espaciamento es $\lambda/2$.

102

Direcciones de nulos para sistemas de “n” fuentes puntuales isotrópicas de igual amplitud y espaciamiento

- Las direcciones de los nulos para un sistema de n fuentes puntuales isotrópicas de igual amplitud y espaciamiento ocurre cuando E = 0 o, provisto que el denominador de la ec. (5-6-4) no sea cero, cuando

$$e^{jn\psi} = 1 \quad \dots(1)$$

$$n\psi = \pm 2K\pi \quad \dots(2)$$

103

Tipo de sistema	Direcciones nulas (cualquier longitud de sistema)	Direcciones nulas (sistema grande)	Ancho de haz entre los primeros nulos (sistema grande)
Caso general	$\phi_0 = \arccos \left[\left(\pm \frac{2K\pi}{n} - \delta \right) \frac{1}{d_r} \right]$		
Transversal	$\gamma_0 = \arcsen \left(\pm \frac{K\lambda}{nd} \right)$	$\gamma_0 \approx \pm \frac{K\lambda}{nd}$	$2\gamma_{01} \approx \frac{2\lambda}{nd}$
Longitudinal ordinario	$\phi_0 = 2\arcsen \left(\pm \sqrt{\frac{K\lambda}{2nd}} \right)$	$\phi_0 \approx \pm \sqrt{\frac{2K\lambda}{nd}}$	$2\phi_{01} \approx 2\sqrt{\frac{2\lambda}{nd}}$
Longitudinal con directividad incrementada	$\phi_0 = 2\arcsen \left[\pm \sqrt{\frac{\lambda}{4nd}} (2K-1) \right]$	$\phi_0 \approx \pm \sqrt{\frac{\lambda}{nd}} (2K-1)$	$2\phi_{01} \approx 2\sqrt{\frac{\lambda}{nd}}$

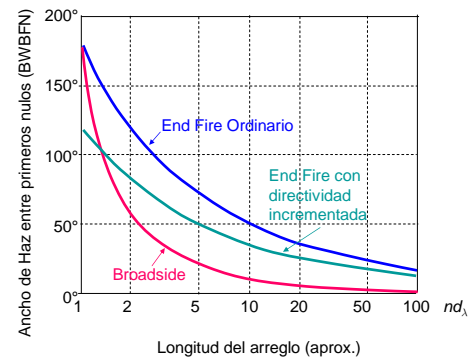
Tabla 5-2 Direcciones nulas y anchos de haz entre los primeros nulos para sistemas lineales de n fuentes isotrópicas puntuales de igual amplitud y espaciamiento.

104

- Las formulas en la Tabla 5-2 han sido usadas para calcular las curvas presentadas en la Fig. 5-26. Esas curvas muestran el ancho de haz entre los primeros nulos como una función de ndλ para tres tipos de sistemas: transversal, longitudinal ordinario, longitudinal con directividad incrementada. La cantidad ndλ (= nd/λ) es aproximadamente igual a la longitud de un sistema en longitudes de onda para sistemas grandes. El valor exacto de la longitud del sistema es (n-1)dλ

105

Fig. 5-26



106

- Ancho de haz entre los primeros nulos como una función de “ndλ” para sistemas de “n” fuentes puntuales isotrópicas de la misma amplitud. Para sistemas grandes, “ndλ” es aproximadamente igual a la longitud del arreglo.

107



Muchas gracias por su atención



**UNI - FIEE
Lima Perú**

108